

# TÜKRÖS ANAMORFÓZIS

A művészet és a tudomány egyik látványos találkozása az anamorf kép. A sajátos ábrázolás első példái *Leonardo da Vinci* (1452–1519) *Codex Atlanticus* című vázlatgyűjteményében található. A 16. századtól kezdődően az anamorfikus technikákkal készített

---

Jelen munkát *Orosz István* grafikusművész Verne Gyuláról készült anamorf képe inspirálta; a szerzők köszönetet mondanak hasznos útmutatásaiért és a 3. *ábra* publikációs jogának engedélyéért.



*Laczik Bálint* okleveles gépészmérnök, okleveles matematikus szakmérnök, 1982 és 2017 között a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gyártástudomány és -technológia Tanszékének oktatója, jelenleg nyugdíjas.

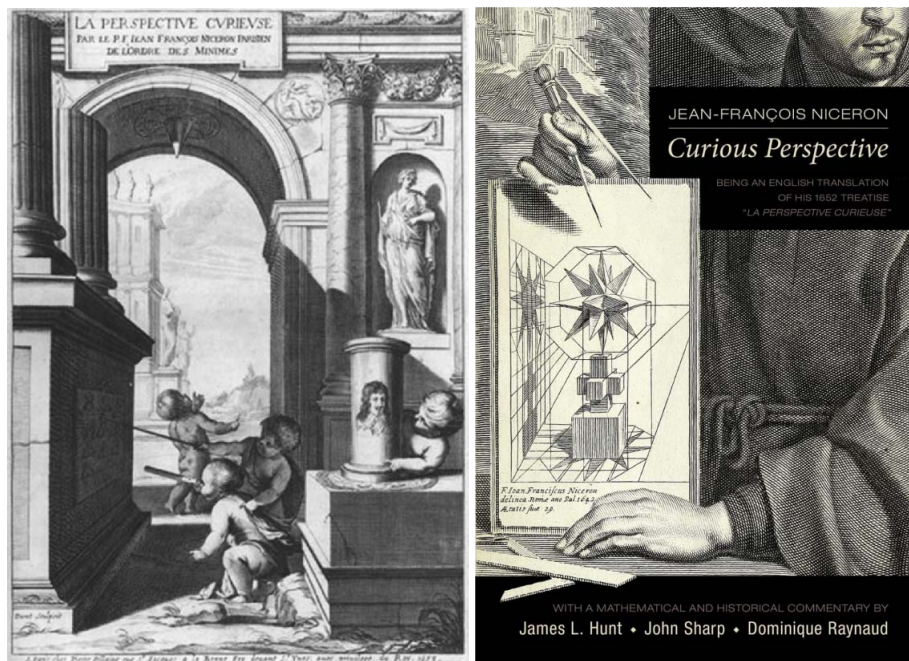
Laczik Bálint, Póka György  
BME Gyártástudomány és -technológia tanszék

festmények és rézkarcok megannyi változata ismeretes.

A tárgykör első, tudományos igényű feldolgozása *Jean-François Nicéron* (1613–1646) minorita szerzetes, matematikus *La Perspective curieuse* című (Paris, 1652) könyvében szerepel. A különleges érdekességű kiadvány gazdagon kommentált, angol nyelvű fordítása 2019-ben jelent meg [1] (1. *ábra*).



*Póka György* okleveles gépészmérnök, doktori fokozatát 2021. júniusában szerezte. Jelenleg a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gyártástudomány és -technológia Tanszékének adjunktusa, oktató-kutató munkatársa.



1. ábra. Nicéron könyvének eredeti és az új kiadás címlapja.

Az anamorfózis a görög „ana” (vissza-) és „morphosis” (változás) szavakból alkotott kifejezés, a rejtett tartalmú képek általános megnevezése. A perspektíva elvű anamorf ábrákon az igazi alkotás csupán egyetlen, speciális nézőpontból szemlélve ismerhető fel. Erhard Schön (1491–1542) apró figurákból és tájképrészletekből felépült, furcsa rézkarcát (2. ábra) bal oldalról, erősen megdőntve, ferdén nézve a korszak négy fontos személyének arcképe jelenik meg: legfelül V. Károly (1500–1558), alatta I. Ferdinánd (1503–1564) Habsburg-házi uralkodók, lejjebb

házánk több köztéri műalkotását.<sup>1</sup> A számítástechnika fejlődésének köszönhetően anamorf képek szerkesztésére számos, többé-kevésbé jól használható programot érhetünk el az Interneten [4].

A jelen összeállítás a tükrös anamorfózis képalkotásának összefüggéseit az elemi vektoralgebra eszközeivel, a Maple V. R 13 matematikai software segítségével vizsgálja.

<sup>1</sup>Andabázi László művei a főváros XVII. kerületében, valamint Gyulán állnak.

2. ábra. Erhard Schön: Vexierbild: Anamorphisches Porträt von Karl V., Ferdinand I., Papst Paul II. und Francis I. (Kupferstichkabinett, Staatliche Museen zu Berlin, [2]).



## Az általános tükörfelületről visszavert fénysugár

Határozzuk meg az általános állású tükörfelületről visszavert fénysugár irányvektorát (lásd a 4. ábrát)! Az egyszerűbb írásmód érdekében a formulákat sorvektorként adjuk meg.

Legyen a tükör  $P$  pontjába eső sugár egyenesének irányvektora  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , ugyanitt a tükörfelület normálvektora  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ , és a visszavert sugár egyenesének egy-ség irányvektora  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ .

Az elemi optika alaptörvényei szerint

a) a  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{n}$  és  $\mathbf{w}$  vektorok közös síkban fekszenek, továbbá

b) a tükörfelület  $\mathbf{n}$  normálvektora azonos  $\varphi$  szöget zár be a  $\mathbf{v}$  és a  $\mathbf{w}$  vektorokkal.

Az a) törvényt formálisan felírva, a három vektor komplanaritását a vektorokból képzett mátrix determinánsának nulla értéke fejezi ki.

$$\det([\mathbf{v} \ \mathbf{n} \ \mathbf{w}]) = 0 \quad (1)$$

A b./ feltétel a vektorok skalár szorzataival:

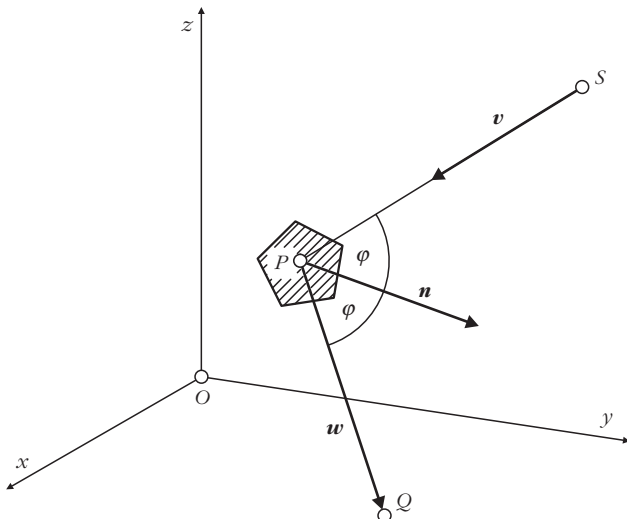
$$\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{v \cdot n} = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}}{w \cdot n} = \cos \varphi, \quad (2)$$

ahol  $v$  és  $n$  a két vektor hosszát jelenti, valamint

$$\mathbf{w} \cdot \frac{\mathbf{v}}{v} = \cos(2\varphi). \quad (3)$$

Alkalmazva a  $\cos(2\varphi) = 2\cos^2\varphi - 1$  azonosságot, a visszavert sugár  $\mathbf{w}$  irányvektorának komponensei az (1) – (3) összefüggésekből kifejtett lineáris egyenletrendszer megoldásai.

4. ábra. Az általános állású tükörfelületre beeső és visszavert fénysugár.



3. ábra. Orosz István: Verne Gyula [3].

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{v_1 (n_1^2 - n_2^2 - n_3^2) + 2 n_1 (n_2 v_2 + n_3 v_3)}{(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \\ w_2 &= \frac{v_2 (n_2^2 - n_1^2 - n_3^2) + 2 n_2 (n_1 v_1 + n_3 v_3)}{(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \\ w_3 &= \frac{v_3 (n_3^2 - n_1^2 - n_2^2) + 2 n_3 (n_1 v_1 + n_2 v_2)}{(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

## A hengertükör sugármenetének szerkesztése

A hengertükros anamorfózis képalkotása az ábrázoló geometria Monge-féle két képsíkos technikájával szerkeszthető [5–7].

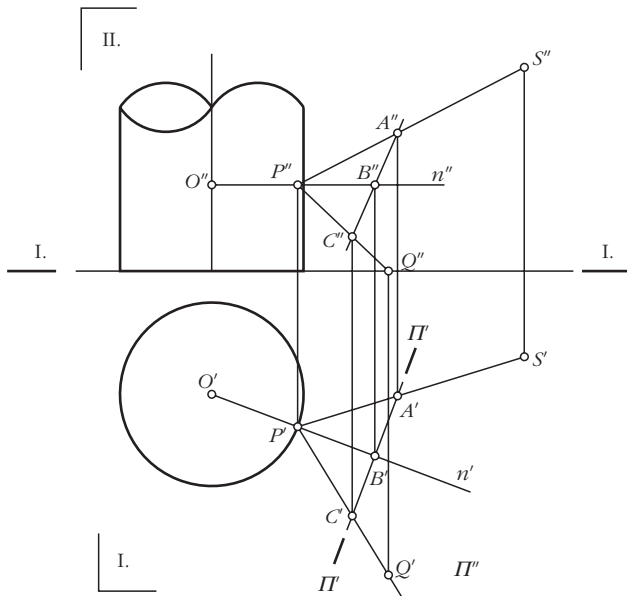
Az I. képsíkra merőlegesen állított hengertükör palástján az I. síkban fekvő alakzat képe jelenik meg. A megfigyelő a  $S$  pontból szemléli a palást  $P$  pontjában megjelenő, az I. képsíkon fekvő  $Q$  pont tükörképét. Az  $SPQ$  sugármenet szerkesztése az 5. ábrán látható.

A  $S$  pontból induló fénysugár a  $P$  pontban éri el a tükörpalástot, innen visszaverődve az I. síkban a  $Q$  pontot jelöli ki.

Az  $SP$  sugár vonalán fekvő  $A''$  és  $S''$ , valamint  $A'$  és  $S'$  pontok összetartozó képeivel a sugár egyenesének két képe szerkeszthető. A  $P'$  pontot tartalmazó henger alkotó és a  $A''S''$  egyenes metszéspontja a  $P''$  pont második képsíkra eső képét jelöli ki.

A tükör felületi normálisai merőlegesek a henger tengelyére. A  $P''$  pontban a henger tengelyére állított merőleges a normális  $n''$  képe, a henger tengelyének első képsíkba eső  $O'$  pontján és a  $P'$  ponton át szerkeszthető a normális  $n''$  egyenesének valódi képe.

Vegyük fel a  $A'$  pontot tartalmazó és a normálisra merőleges  $II'$  segédsíkot. A segédsík a normális  $n''$  képe  $B'$  pontban metszi. A  $P'$  pontból induló visszavert sugár  $C'$  pontját az  $A'$  pontnak  $n'$ -re tükrözésével kapjuk



5. ábra. Hengertükörrre beeső és visszavert fénysugár egyenesek szerkesztése [5–7].

meg. A II. képsíkon a  $C''$  pontot az  $A''B''$  egyenesén az  $A''B'' = B''C''$  távolság metszi ki.

A  $P''$  pontot  $C''$ -vel összekötve a visszavert sugár II. képsíkra eső képe adódik, ez a sugár az I. képsík nyomvonalán a  $Q''$  pontot jelöli ki. Végül a  $Q''$  pontot a  $P'C'$  egyenesre levetítve, az anamorfózis  $Q'$  pontjának első síkbeli képét kapjuk meg.

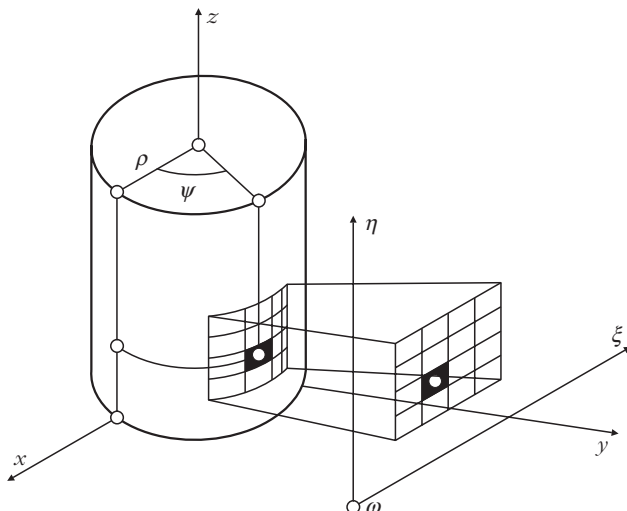
## A hengertükör sugármenetének vektormodellje

Az  $x$ - $y$  síkon álló körhenger palástfelületének normál egységvektora a  $P = (\rho \cos \psi, \rho \sin \psi, z)$  pontban

$$\mathbf{n} = (\cos \psi, \sin \psi, 0) \quad (5)$$

Behelyettesítve a (4) kifejezésekbe, a  $P$  pontban a  $\mathbf{v}$  irányvektorral a tükörrre beeső, majd a visszaverődő

6. ábra. Párhuzamos vetítés a hengerpálástra.



sugár egyenesese  $\mathbf{w}$  egység irányvektorának három komponense:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{v_1 \cos(2\psi) + v_2 \sin(2\psi)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \\ w_2 &= \frac{v_1 \sin(2\psi) - v_2 \cos(2\psi)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \\ w_3 &= \frac{-v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Legyen adott az  $x$ - $z$  síkkal párhuzamos, tetszőleges  $y$  koordinátájú ponton átmenő síkban fekvő  $\xi = \xi(u)$ ,  $\eta = \eta(u)$  paraméteres alakzat. Az alakzatot a  $z$  tengelyű,  $r$  sugarú henger palástjára „rásimító” transzformáció (6. ábra):

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\xi}{\rho}, \\ x &= \rho \cos \psi, \\ y &= \rho \sin \psi, \\ z &= \eta. \end{aligned} \quad (7)$$

(Ezt a transzformációt valósítja meg a hengeres hirdetőoszlop palástjára ragasztott plakát.) Szemlélje a megfigyelő az  $S = (X, Y, Z)$  pontból rendszert. Az  $S$  pontból a hengerpálástra simított kép  $P$  pontjához mutató sugár vektora

$$\mathbf{v} = (X-x, Y-y, Z-z). \quad (8)$$

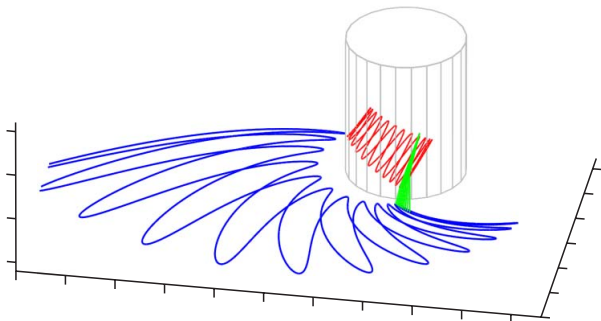
Ugyanez a sugár a hengerfelületről (6) szerint a

$$\begin{aligned} W_1 &= \kappa [v_1 \cos(2\psi) + v_2 \sin(2\psi)], \\ W_2 &= \kappa [v_1 \sin(2\psi) - v_2 \cos(2\psi)], \\ W_3 &= -\kappa v_3 \end{aligned} \quad (9)$$

koordinátákkal leírható  $\mathbf{W}$  irányvektorú egyenes vonalon verődik vissza. A visszavert sugár a  $z = 0$  síkon kijelöli az anamorfózis  $Q$  képpontját, tehát  $\kappa = z/v_3$ .

A műveleteket elvégezve és egyszerűsítve a hengerfelületre „simított” alakzat koordinátáiból a  $x$ - $y$  síkban fekvő anamorf  $Q$  képpont koordinátái:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\rho \cos\left(\frac{\xi}{\rho}\right)(Z-2\eta) + \eta \left[ \cos\left(\frac{2\xi}{\rho}\right)X + \sin\left(\frac{2\xi}{\rho}\right)Y \right]}{Z-\eta}, \\ Q_2 &= \frac{\rho \sin\left(\frac{\xi}{\rho}\right)(Z-2\eta) + \eta \left[ \sin\left(\frac{2\xi}{\rho}\right)X + \cos\left(\frac{2\xi}{\rho}\right)Y \right]}{Z-\eta}, \\ Q_3 &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$



7. ábra. Lissajou-görbe hengertükrös anamorfóza.

A 7. ábra az  $r = 60$  sugarú tükör palástjára leképezett  $\xi = 35 \cos u$ ,  $\eta = 30 \sin(12u) + 55$  egyenletű,  $\alpha = 28,6^\circ$ -kal elforgatott Lissajou-görbét és hozzá tartozó anamorf képet szemlélteti. A megfigyelőpont koordinátái:  $S = (40, 150, 130)$ .

### Párhuzamosan vetített alakzatok anamorf képei

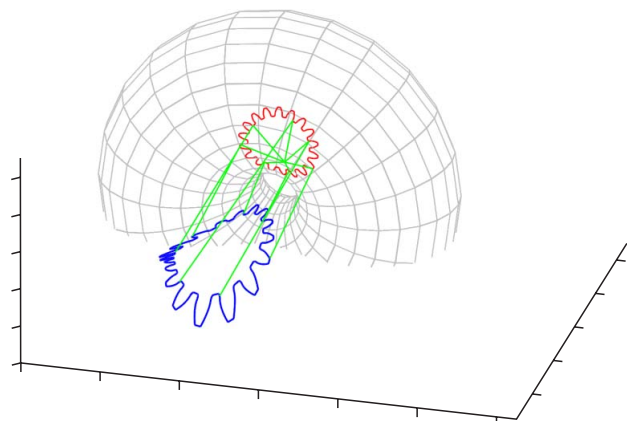
Különösen egyszerű a különféle alakú tükröfelületekre párhuzamos sugarakkal vetített alakzat anamorf képének előállításása. Legyen a tükör körgyűrű alakú, álljon a tükröfelület középpontja az origóban, és szimmetriatengelye essen az  $x$  koordinátatengelybe. A gyűrű sugara  $r$ , a gyűrű középpontja  $R$  távolságra van a szimmetriatengelytől. A felület általános  $p = (p_1, p_2, p_3)$  pontja

$$\begin{aligned} p_1 &= x, \\ p_2 &= \sqrt{r^2 - \left(R - \sqrt{x^2 + z^2}\right)^2}, \\ p_3 &= z \end{aligned} \quad (11)$$

és egységnyi normálisának  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  vektora

$$n_1 = \frac{\sqrt{r^2 - R^2 + 2R\sqrt{y^2 + z^2} - y^2 - z^2}}{r}, \quad (12a)$$

8. ábra. Körgyűrű alakú tükörre párhuzamosan vetített alakzat anamorf képe.



$$\begin{aligned} n_2 &= y \frac{-R + \sqrt{y^2 + z^2}}{r\sqrt{y^2 + z^2}}, \\ n_3 &= z \frac{-R + \sqrt{y^2 + z^2}}{r\sqrt{y^2 + z^2}}. \end{aligned} \quad (12b)$$

Az  $x$  tengellyel párhuzamos sugarakkal vetítve az  $x$ - $z$  síkkal párhuzamos síkban fekvő  $\xi = \xi(u)$ ,  $\eta = \eta(u)$  alakzatot, az  $(X, Y, Z)$  megfigyelőpontból az alakzat pontjaihoz vezető sugár  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  vektora

$$\begin{aligned} v_1 &= X - \xi, \\ v_2 &= Y - \sqrt{r^2 - \left(R - \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right)^2}, \\ v_3 &= Z - \eta. \end{aligned} \quad (13)$$

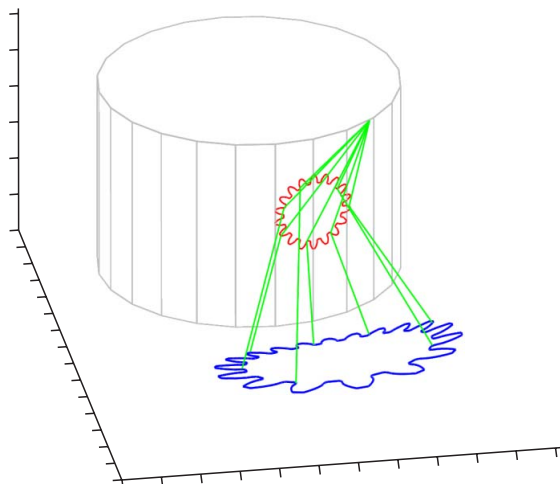
A (4), (10) és (11) formulák alkalmazásával az  $x$ - $y$  síkban fekvő anamorf kép pontjai adódnak.

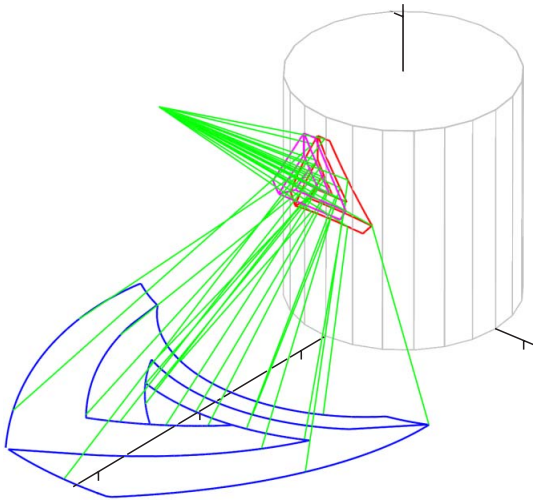
A  $z$  tengelyű,  $r$  sugarú, henger alakú tükörre az  $x$  tengellyel párhuzamos sugarakkal vetítve a  $\xi = \xi(u)$ ,  $\eta = \eta(u)$  síkgörbét, a sugármenet és a felületi normális egyenletei

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \left(\sqrt{\rho^2 - y^2}, y, z\right), \\ \mathbf{v} &= \left(X - \sqrt{r^2 - \xi^2}, Y - \xi, Z - \eta\right), \\ \mathbf{n} &= \left(\frac{\sqrt{\rho^2 - y^2}}{\rho}, \frac{y}{\rho}, 0\right). \end{aligned} \quad (14)$$

A 8. ábra a körgyűrű felületére, a 9. ábra a hengerfelületre párhuzamosan vetített evolvens – a leginkább elterjedt profilú – fogaskerék kontúrjának anamorf képét szemlélteti.

9. ábra. Henger alakú tükörre párhuzamosan vetített alakzat anamorf képe.





10. ábra. Hengertükörre középpontosan vetített alakzat – Penrose-háromszög – anamorf képe.

### Centrálisan vetített ábra anamorf képe

Különösen látványos, természetes hatású képet központos vetítéssel állíthatunk elő (ennek szép példája a 3. ábrán látható Verne Gyula-kép Orosz Istvántól).

Vetítsük a megfigyelő  $S = (X, Y, Z)$  nézőpontjából induló sugarakkal a  $z$  tengelyű,  $r$  sugarú hengerre az  $x = A$  síkban álló,  $r = (A, x, h)$  koordinátákkal adott képet. Az  $r$  képponton átmenő vetítő sugár a hengert a

$$p = (\sqrt{\rho^2 - y^2}, y, z) \quad (15)$$

pontban döfi. A sugármenet vektoregyenlete:

$$\mathbf{S} + \lambda(\mathbf{r} - \mathbf{S}) = \mathbf{p}, \quad (16)$$

ahol  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}$  a megfelelő pontokba mutató vektorokat jelenti.

A vektoregyenlet  $\lambda$ ,  $y$  és  $z$  megoldásai zárt alakban kifejezhetők. Alkalmazva a

$$q = \sqrt{\rho^2 [(Y - \xi)^2 + (X - A)^2] - (AY - \xi X)^2} \quad (17)$$

jelölést,

$$y = \frac{Y[A(A - X) + q] + \xi[X(X - A) - q]}{(Y - \xi)^2 + (X - A)^2}, \quad (18)$$

és

$$z = \frac{Z[\xi(\xi - y) + q + A(A - X)]}{(Y - \xi)^2 + (X - A)^2} + \frac{\eta[Y(Y - \xi) - q + X(X - A)]}{(Y - \xi)^2 + (X - A)^2}. \quad (19)$$

Behelyettesítve a (18) és (19) kifejezéseket (16)-ba, megkapjuk a hengerfelületen az  $S$  pontból az  $r$  pontot

vetítő sugár dőfspontját. A (4) és (10) összefüggések alapján, a tükörről visszavert sugár a  $z = 0$  síkon kijelölő a  $Q$  anamorf képpontot.

A 10. ábra a hengertükörre centrálisan vetített „lehetetlen alakzat”, a térlátást alaposan próbára tevő Penrose-háromszög centrális vetítését és anamorf ábráját szemlélteti.

A 11. ábrán pedig a megszerkesztett anamorf ábra valóságos hengertükör felülettel visszaállított képe látható.

### Irodalom

1. J.-F. Nicéron: *Curious Perspective*. Arizona Center for Medieval Renaissance Studies, Tempe, Arizona, 2019.
2. <https://www.jstor.org/stable/community.15724359>
3. <http://utisz-utisz.blogspot.com>
4. [www.anamorphosis.com](http://www.anamorphosis.com)
5. A. Zdziarski, M. Jonak: Cylindrical Anamorphic Images – a Digital Method of Generation. *Techn. Transactions Architecture* 10A-2015
6. F. Di Paola, P. Pedone, L. Inzerillo, C. Santagati: Anamorphic Projection: Analogical/Digital Algorithms. *Nexus Network Journal* 17(2015) 253–285.
7. Szilágyi Zs.: *Az anamorfózis geometriai aspektusai és építészeti alkalmazása*. TDK dolgozat, BME Építészeti Ábrázolás Tanszék, 2010. [https://www.google.hu/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwi\\_9Mq7z5HvAhUO3hoKHTuiDNYQFjAAegQIAhAD&url=http%3A%2F%2Fwww.epab.bme.hu%2FTDK%2F2010%2FSzilagyizsombor\\_Anamorfosis\\_TDK\\_2010\\_TAMOP.pdf&usg=AOvVaw2rNSiTL4idkvWM2uUakZ\\_d](https://www.google.hu/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwi_9Mq7z5HvAhUO3hoKHTuiDNYQFjAAegQIAhAD&url=http%3A%2F%2Fwww.epab.bme.hu%2FTDK%2F2010%2FSzilagyizsombor_Anamorfosis_TDK_2010_TAMOP.pdf&usg=AOvVaw2rNSiTL4idkvWM2uUakZ_d)

11. ábra. A Penrose-háromszög anamorf képe (a szerzők felvétele).

